



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A  
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**SOUVISLOST SILOVÉHO PŮSOBENÍ A DEFORMAČNÍCH  
CHARAKTERISTIK S ENERGÍÍ DEFORMOVANÉHO  
SYSTÉMU**

RELATIONSHIP OF FORCE AND DEFORMATION CHARACTERISTICS TO THE ENERGY OF DEFORMED  
SYSTEM

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

Oldřich Kupka

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.

**BRNO 2020**



# Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky  
Student: **Oldřich Kupka**  
Studijní program: Strojírenství  
Studijní obor: Základy strojního inženýrství  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Jana Horníková, Ph.D.**  
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Souvislost silového působení a deformačních charakteristik s energií deformovaného systému**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Provedení literární rešerše zaměřené na užití energetické metody, zejména odvození Castiglianovy věty, při výpočtu deformačních charakteristik a sil působících na pružná tělesa.  
Porovnání jednotlivých metod a posouzení podmínek jejich použití.

### **Cíle bakalářské práce:**

Porovnání vybraných energetických metod výpočtu silového působení a deformačních charakteristik.  
Odvození Castiglianovy věty a její užití na příkladech.

### **Seznam doporučené literatury:**

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004, ISBN: 80-214-2592-x.

REDDY, J. N.: Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, INC., 2017, ISBN: 13: 978-1119087373.

BUDYNAS, R. G.: Advanced Strength and Applied Stress Analysis. McGraw-Hill Education, 1998, ISBN: 13-978-0070089853.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Tato bakalářská práce se zabývá popisem energií v deformovaných soustavách a jejich využitím pro určení síly působící na soustavu a posuvů způsobených silami. V úvodní části jsou popsány základní druhy namáhání a jak lze u nich určit energii napjatosti a posuvy. Dále jsou popsány energie napjatosti a potenciální energie včetně jejich komplementárních složek. Následuje objasnění principu virtuálních prací, Bettiho věty a Maxwellova teorému reciprocity. Poté je odvozen první a druhý Castiglianův teorém. Ty jsou následně aplikovány na staticky určitou a neurčitou úlohu.

## **Klíčová slova**

Energie napjatosti, komplementární energie napjatosti, princip virtuálních prací, Castiglianův teorém, lineárně a nelineárně elastický materiál

## **Abstract**

The bachelor's thesis deals with the description of energy in deformed systems and their use to determine the force acting on the system and displacements caused by forces. In the first part of the thesis there are described the basic types of stresses and how it is possible to determine their strain energy and displacements. After that, strain and potential energy including their complementary components are described. Next part is explanation of the principle of virtual work, Betti's theorem and Maxwell's reciprocity theorem. In the second part of thesis, the first and the second Castigliano's theorems are derived. Castigliano's theorems are applied to a statically determinate and indeterminate problems.

## **Key words**

Strain energy, complementary strain energy, virtual work principle, Castigliano's theorem, linear and nonlinear elastic material

## **Bibliografická citace**

KUPKA, Oldřich. *Souvislost silového působení a deformačních charakteristik s energií deformovaného systému*. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/125294>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, 42 s. Vedoucí práce Jana Horníková.

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Souvislost silového působení a deformačních charakteristik s energií deformovaného systému* vypracoval samostatně pod vedením vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Jany Horníkové, Ph.D. a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu použitých zdrojů.

V Brně dne 20.6. 2020

---

Oldřich Kupka

## **Poděkování**

Děkuji své vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Janě Horníkové, Ph.D., za cenné rady, ochotu, připomínky a velmi dobré vedení. Dále chci poděkovat rodičům, kteří mě podporovali během celého studia.



# Obsah

Úvod.....	9
1. Druhy namáhání a jeho energie .....	11
1.1. Prostý tah a tlak .....	11
1.2. Prostý ohyb .....	11
1.3. Prostý krut.....	12
2. Energie .....	13
2.1. Energie napjatosti .....	13
2.2. Komplementární energie napjatosti.....	15
2.3. Princip virtuální práce .....	15
2.4. Celková potenciální energie .....	17
3. Bettiho věta .....	19
4. Maxwellův teorém reciprocity .....	20
5. První Castiglianův teorém.....	21
6. Druhý Castiglianův teorém .....	22
7. Aplikace teorie na příklady .....	24
7.1. Staticky určitá úloha .....	24
7.1.1. Řešení pomocí principu virtuálních prací.....	24
7.1.2. Řešení pomocí prvního Castiglianova teorému.....	26
7.1.3. Řešení pomocí druhého Castiglianova teorému .....	27
7.2. Staticky neurčitá úloha .....	29
7.2.1. Řešení sil v lineárně elastickém materiálu prvním Castiglianovým teorémem ....	29
7.2.2. Řešení sil v lineárně elastickém materiálu druhým Castiglianovým teorémem....	30
7.2.3. Řešení sil v nelineárně elastickém materiálu prvním Castiglianovým teorémem.	33
Závěr.....	37
Seznam použitých zdrojů .....	38
Seznam použitých symbolů.....	39
Seznam použitých zkratk.....	42

# Úvod

Strojní součásti jsou namáhány různými způsoby. Silové a momentové zatížení v nich způsobuje akumulaci energie. Tato energie může vést ke zničení součástí. Lze ji ovšem i využít v základních mechanických výpočtech. Při znalosti druhu namáhání, velikosti zatěžující síly nebo momentu a při znalosti geometrie a materiálu tělesa je možné energii v tělese určit a pomocí ní lze určit i deformační charakteristiky. Postupovat lze i tak, že ze znalosti výchylky je určena zatěžující síla.

Cílem této bakalářské práce je popsání energií, které vznikají při namáhání tělesa, i jejich komplementárních složek, které jsou při výpočtech často využívány. Budou popsány teoremy, které souvisí se silovým působením a deformačními charakteristikami. Bude následovat odvození Castiglianových teorémů, vysvětlení rozdílů mezi nimi a možnosti jejich použití. Na závěr se aplikují některé teze na staticky určitý a staticky neurčitý příklad, kde bude možné sledovat, jak různé teorie vedou ke stejnému výsledku a také jaký rozdíl ve výsledku způsobí lineární elasticita materiálu.

# 1. Druhy namáhání a jeho energie

Jsou-li splněny prutové předpoklady, tak u přímého prizmatického prutu jsou rozlišována následující namáhání: prostý tah a tlak, prostý ohyb a prostý krut. Při řešení statické rovnováhy se prvek uvolní v nedeformovaném stavu. Pro každé namáhání lze určit jeho energii napjatosti  $W$  a měrnou energii napjatosti  $\Lambda$ , pro které platí [1]:

$$\Lambda = \frac{dW}{d\Omega} \quad (1.1)$$

Pokud je materiál prutu lineárně elastický, tak lze posuv ve směru síly, nebo úhly natočení střednice (prostý ohyb) a natočení příčného průřezu (prostý krut) ve směru momentu, určit pomocí druhého Castiglianova teorému [2].

## 1.1. Prostý tah a tlak

Při prostém tahu (nebo tlaku) dochází k oddalování příčných průřezů (nebo přiblížení) a jejich následné deformaci. Normálová síla je jedinou nenulovou složkou VVÚ.

Pro měrnou energii napjatosti platí:

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} \quad (1.2)$$

Energie napjatosti přímého prutu jako funkce VVÚ se určí:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{N^2(x)}{E \cdot S(x)} \cdot dx \quad (1.3)$$

Spojením vztahů pro délkové přetvoření s Hookovým zákonem se získá vztah pro posuv obecného bodu ve vzdálenosti  $x$  od bodu 0, který je počátkem globálního souřadnicového systému (při konstantním průřezu, Youngově modulu pružnosti a normálové síle) [1]:

$$u(x) = \frac{N \cdot x}{E \cdot S} \quad (1.4)$$

Dalším způsobem určení posuvu je druhý Castiglianův teorém [3].

## 1.2. Prostý ohyb

Při namáhání prostým ohybem dochází k vzájemnému natočení příčných průřezů kolem osy, která leží v příčném průřezu, a k jejich následné deformaci. Ohybový moment je jedinou nenulovou složkou VVÚ [1].

Pro měrnou energii napjatosti platí vztah (1.2) [4].

Energie napjatosti přímého prutu jako funkce VVÚ se určí:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{M_y^2(x)}{E \cdot J_y(x)} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{M_z^2(x)}{E \cdot J_z(x)} \cdot dx \quad (1.5)$$

Průhyb střednice prutu ve směru osy  $z$  a úhel jejího natočení lze získat z diferenciální rovnice průhybové čáry, která pro malé deformace má tvar:

$$w'' = \pm \frac{M_y}{E \cdot J_y} \quad (1.6)$$

Po integraci a určení okrajových podmínek se získá posuv  $w$  v daném místě, případně úhel natočení střednice  $w' = \varphi$  [1]. Dalším způsobem určení průhybu střednice a jejího natočení je druhý Castiglianův teorém [3].

### 1.3. Prostý krut

Při prostém krutu dochází k vzájemnému natočení příčných průřezů kolem střednice prutu, k jejich následné deformaci nedochází. Příčný průřez musí být kruhový, nebo mezikruhový. Krouticí moment je jedinou nenulovou složkou VVÚ.

Pro měrnou energii napjatosti platí:

$$\Lambda = \frac{\tau^2}{2 \cdot G} \quad (1.7)$$

Energie napjatosti přímého prutu jako funkce VVÚ se určí:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_0^x \frac{M_k^2(x)}{G \cdot J_p(x)} \cdot dx \quad (1.8)$$

Z rovnic pro relativní úhel zkroucení lze jejich úpravou získat vztah pro úhel natočení příčného průřezu okolo střednice prutu [1]:

$$\varphi = \int_0^x \frac{M_k(x)}{G \cdot J_p(x)} \cdot dx \quad (1.9)$$

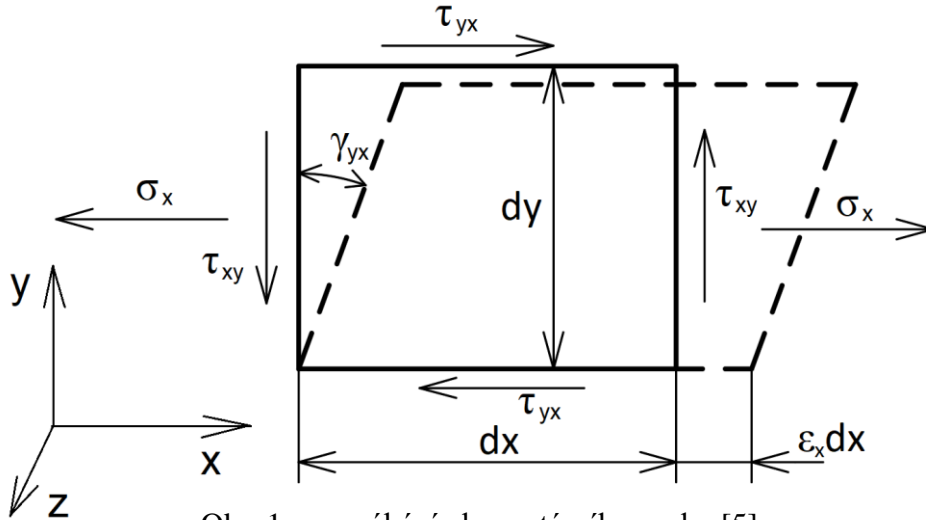
Dalším způsobem určení úhlu natočení příčného průřezu je druhý Castiglianův teorém [3].

## 2. Energie

### 2.1. Energie napjatosti

Při deformaci elementárního prvku o hranách  $dx$ ,  $dy$  a  $dz$  na obrázku 1 vzniká délkové přetvoření  $\varepsilon_x$  a úhlové přetvoření  $\gamma_{yx}$ , elementární síly vykonají určitou práci. Při změně délkového přetvoření a úhlového přetvoření o hodnoty  $d\varepsilon_x$  a  $d\gamma_{yx}$  se vykoná práce o hodnotě:

$$\begin{aligned} & (\sigma_x \cdot dy \cdot dz) \cdot d\varepsilon_x \cdot dx + (\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz) \cdot d\gamma_{yx} \cdot dy = \\ & = (\sigma_x \cdot d\varepsilon_x + \tau_{yx} \cdot d\gamma_{yx}) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned} \quad (2.1)$$



Obr. 1 – namáhání elementárního prvku [5]

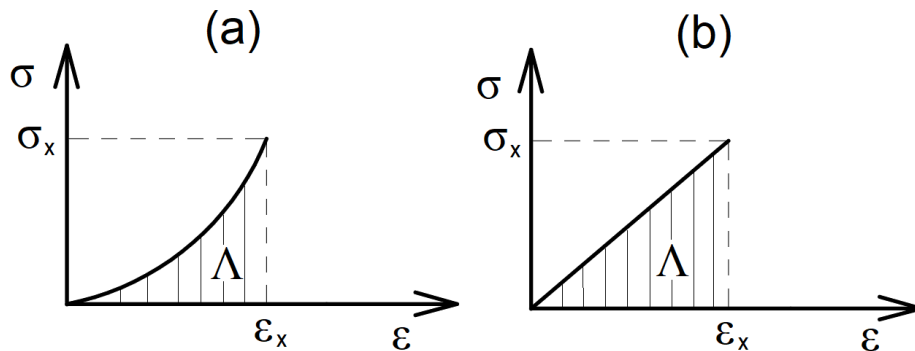
Tenzory přetvoření  $\mathbf{T}_\varepsilon$  a napětí  $\mathbf{T}_\sigma$  jsou souměrné. V ostatních složkách tenzoru přetvoření se vykoná obdobná práce. Změnu vykonané práce, která se ukládá jako energie napjatosti, lze zapsat:

$$d^2W = \mathbf{T}_\sigma^T \cdot d\mathbf{T}_\varepsilon \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \mathbf{T}_\sigma^T \cdot d\mathbf{T}_\varepsilon \cdot d\Omega \quad (2.2)$$

Celková vykonaná práce je uložena jako energie napjatosti v elementárním prvku. Celková energie napjatosti se vyjádří [5]:

$$W = \int_{\Omega} \Lambda(x, y, z) \cdot d\Omega \quad (2.3)$$

$\Lambda$  je měrná energie napjatosti [6], což je plocha pod křivkou  $\sigma(\varepsilon)$  [7].



Obr. 2 – křivka  $\sigma(\varepsilon)$  elastického materiálu (nelineárního (a) a lineárního (b)) [6]

Pro jednoosou napjatost ve směru osy x platí:

$$\Lambda = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x \quad (2.4)$$

kde horní mez integrálu představuje konečný stav délkového přetvoření. Tento vztah platí pro elastické materiály (lineární i nelineární) [8]. V případě, že se jedná o lineární materiál, se po dosazení Hookova zákona získá tvar [1]:

$$\Lambda = \frac{\sigma^2}{2 \cdot E} = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \varepsilon^2 \quad (2.5)$$

Měrná energie napjatosti pro trojosou napjatost:

$$\begin{aligned} \Lambda = & \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x \cdot d\varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon_y} \sigma_y \cdot d\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon_z} \sigma_z \cdot d\varepsilon_z + \\ & + \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} \cdot d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} \cdot d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} \cdot d\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Přírůstek měrné energie napjatosti se vyjádří:

$$d\Lambda = \sigma_x \cdot d\varepsilon_x + \sigma_y \cdot d\varepsilon_y + \sigma_z \cdot d\varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot d\gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot d\gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot d\gamma_{zx} \quad (2.7)$$

Jelikož je materiál elastický, tak z definice vyplývá, že je nezávislý na historii zatěžování i na průběhu zatěžování, lze tedy zapsat:

$$d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_x} \cdot d\varepsilon_x + \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_y} \cdot d\varepsilon_y + \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_z} \cdot d\varepsilon_z + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{xy}} \cdot d\gamma_{xy} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{yz}} \cdot d\gamma_{yz} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \gamma_{zx}} \cdot d\gamma_{zx} \quad (2.8)$$

Jednotlivé složky napětí se získají parciální derivací měrné energie napjatosti podle odpovídající složky délkového přetvoření [6].  $\Lambda$  se označuje jako napěťový potenciál. Pro normálová napětí platí [5]:

$$\sigma_x = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_x}, \quad \sigma_y = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_y}, \quad \sigma_z = \frac{\partial \Lambda}{\partial \varepsilon_z} \quad (2.9)$$

Měrnou energii napjatosti pro trojosou napjatost pro lineárně elastický materiál popisuje Clapyeronův teorém [3], [9]:

$$\begin{aligned} \Lambda = & \frac{1}{2} \cdot (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z) + \frac{1}{2} \cdot (\tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) = \\ & = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{T}_\sigma^T \cdot \mathbf{T}_\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{T}_\varepsilon^T \cdot \mathbf{T}_\sigma \end{aligned} \quad (2.10)$$

## 2.2. Komplementární energie napjatosti

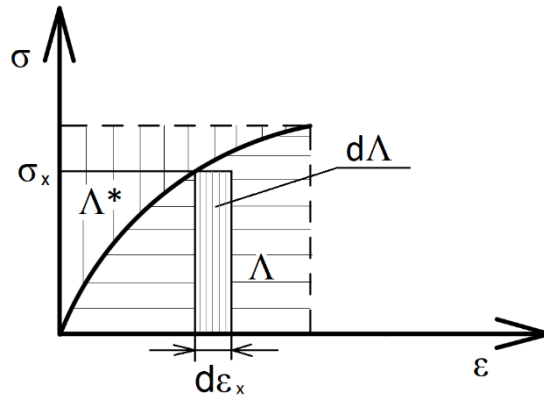
Plocha nad křivkou  $\sigma(\varepsilon)$  v obrázku 2 je označována jako měrná komplementární energie napjatosti [6]. Tato energie nemá přímý fyzikální význam. Využití spočívá v tom, že po sečtení diferenciálu měrné komplementární energie napjatosti s diferenciálem měrné energie napjatosti se získá totální diferenciál součinu  $\mathbf{T}_\sigma^T \cdot \mathbf{T}_\varepsilon$  [5]. Pro měrnou komplementární energii napjatosti platí vztah [8]:

$$\Lambda^* = \int_0^{\sigma_x} \varepsilon_x \cdot d\sigma_x \quad (2.11)$$

Komplementární energie napjatosti se vyjádří jako:

$$W^* = \int_{\Omega} \Lambda^*(x, y, z) \cdot d\Omega \quad (2.12)$$

Pokud se jedná o lineárně elastický materiál, tak platí, že  $\Lambda^* = \Lambda$  a  $W^* = W$ . Když je materiál nelineárně elastický, pak tyto rovnosti neplatí [5].



Obr. 3 – zobrazení měrné energie napjatosti a měrné komplementární energie napjatosti v tahovém diagramu pro jednoosou napjatost (nelineárně elastický materiál) [8]

Podobně jako je měrná energie napjatosti napětíový potenciál, tak se měrná komplementární energie napjatosti označuje jako deformační potenciál. Pro délková přetvoření platí [5]:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \sigma_x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \sigma_y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \Lambda^*}{\partial \sigma_z} \quad (2.13)$$

## 2.3. Princip virtuální práce

Jedná se o myšlenkový experiment při zastaveném čase. Virtuální přetvoření a přemístění tělesa se děje okamžitě - napětí a síly se nemění. Setrvačné síly se neuvažují. Rozdíl oproti principu zachování energie spočívá v tom, že princip zachování energie probíhá v reálném čase a vztahuje se na skutečný děj [5]. Princip virtuální práce lze aplikovat na tělesa lineárně i nelineárně pružná. Lze jej aplikovat na jakékoliv těleso (i plastické a viskoelastické). Jedná se o obecný princip mechaniky, který slouží jako základ pro variační metody.

Virtuální práce vnějších sil je vykonána skutečnými vnějšími silami, které způsobují zobecněné posuvy. Závisí na liniovém zatížení, plošném zatížení, objemovém zatížení, silách i silových dvojicích. Tyto způsoby zatížení se označují jako zobecněné síly [6].

$$\begin{aligned} \delta A_{ext} = & \int_l q \cdot \delta u \cdot dl + \iint_{\Gamma} p \cdot \delta u \cdot d\Gamma + \iiint_{\Omega} o \cdot \delta u \cdot d\Omega + \\ & + \sum_{j=1}^n F_j \cdot \delta u_j + \sum_{i=1}^m M_i \cdot \delta \varphi_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pro případ zatížení zobecněnou konstantní silou  $F_k$  při změně zobecněném posuvu  $u_k$ , při uvažování nekonečně malého (virtuálního) přírůstku  $\delta u_k$ , se celková virtuální práce zatěžujících sil spočítá [5], [8]:

$$\delta A = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta u_k \quad (2.15)$$

Virtuální práce vnitřních sil vzniká při uvažovaném namáhání elementárního prvku, kdy napětí způsobí změnu přetvoření [6]. Získá se  $\delta A_{int}$ :

$$\delta A_{int} = \iiint_{\Omega} [\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \delta \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \delta \gamma_{zx}] \cdot d\Omega \quad (2.16)$$

Rozdíl virtuální práce vnějších sil a virtuální práce vnitřních sil je nulový, vnější síly virtuální práci vykonají, zatímco vnitřní síly ji spotřebují. Pro Lagrangeův princip virtuálních prací tedy platí [5]:

$$\delta A_{ext} = \delta A_{int} \quad (2.17)$$

Když je těleso zatíženo zobecněnou silou  $\delta F_k$  a dochází ke vzniku posuvu  $u_k$ , tak virtuální práce, která se vykoná při takovém posuvu, se nazývá komplementární virtuální práce [8].

$$\delta A^* = \sum_{k=1}^n \delta F_k \cdot u_k \quad (2.18)$$

I pro virtuální komplementární práci vnějších sil a virtuální komplementární práci vnitřních sil platí, že je jejich rozdíl nulový. Platí tedy vztah (2.19) [6]:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} [\delta \sigma_x \cdot \varepsilon_x + \delta \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \delta \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \delta \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \delta \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \delta \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}] \cdot d\Omega = \\ & = \int_l \delta q \cdot u \cdot dl + \iint_{\Gamma} \delta p \cdot u \cdot d\Gamma + \iiint_{\Omega} \delta o \cdot u \cdot d\Omega + \sum_{j=1}^n \delta F_j \cdot u_j + \sum_{i=1}^m \delta M_i \cdot \varphi_i \end{aligned} \quad (2.19)$$



## 2.4. Celková potenciální energie

Nechť je deformované pružné těleso přivedeno zvolna zpět do původního nedeformovaného stavu při konstantním vnějším zatížení, tak se získá práce, která představuje celkovou potenciální energii  $\Pi$  [5].

Pokud je uvažována změna délkového a úhlového přetvoření o hodnoty  $\delta\varepsilon$  a  $\delta\gamma$ , tak pro změnu energie napjatosti platí [6]:

$$\delta W = \int \int \int_{\Omega} [\sigma_x \cdot \delta\varepsilon_x + \sigma_y \cdot \delta\varepsilon_y + \sigma_z \cdot \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \delta\gamma_{zx}] \cdot d\Omega \quad (2.20)$$

Porovnáním rovnice (2.20) s rovnicí (2.16) a (2.17) je zjištěno, že platí následující rovnost:

$$\delta W = \delta A_{ext} = \delta A_{int} \quad (2.21)$$

Při zápisu rovnice (2.15) v diferenciálním tvaru a následné integraci se  $A$  stává potenciálovou funkcí. Potenciální energie práce vnějších sil  $V$  se od potenciálové funkce liší pouze znaménkem. Je patrné, že závisí na posuvu  $du_k$ . Platí tedy:

$$dV = -dA = -\sum_{k=1}^n F_k \cdot du_k \quad (2.22)$$

Z principu virtuálních prací platí, že  $\delta W = -\delta V$ , tedy změna celkové potenciální energie  $\delta\Pi$  je nulová. Tato rovnost platí pro elastická tělesa [5].

$$\delta\Pi = \delta W + \delta V = 0 \quad (2.23)$$

Pokud je těleso ve stabilní rovnováze zatíženo vnějšími silami, je deformováno tak, aby byla změna celkové potenciální energie nulová [6]. Je-li uvažováno druhé přiblížení, tak pro energii napjatosti a potenciální energii vnějších sil musí platit:

$$\delta^2\Pi = \delta^2W + \delta^2V > 0 \quad (2.24)$$

Stabilní rovnováha je tedy stav, kdy je celková potenciální energie minimální při všech kinematicky přípustných deformacích.

Celková potenciální energie zatíženého tělesa se spočítá:

$$\Pi = W + V \quad (2.25)$$

Pokud je virtuální práce vykonaná vnějšími silami závislá na změně síly  $F_k$ , tak se celková potenciální energie nazývá komplementární. Celková komplementární potenciální energie  $\Pi^*$  se získá součtem komplementární energie napjatosti  $W^*$  a komplementární potenciální energie vnějších sil  $V^*$ .

$$\Pi^* = W^* + V^* \quad (2.26)$$

Stejně jako pro změnu celkové potenciální energie platí, že změna celkové komplementární potenciální energie je nulová. Jedná se o podmínku minima celkové komplementární potenciální energie. Jsou-li splněny okrajové podmínky, rovnost platí i pro nelineárně pružná tělesa.

$$\delta\Pi^* = \delta W^* + \delta V^* = 0 \quad (2.27)$$

Minimum komplementární energie napjatosti nastává právě tehdy, když  $\delta W^* = 0$ . Tato věta se nazývá Ménabréova (též třetí Castiglianova věta). Z podmínky minima celkové komplementární potenciální energie vyplývá, že  $\delta V^* = 0$ . Větu lze použít pro řešení staticky neurčitých úloh.

Úpravou rovnice (2.22) lze vyjádřit sílu  $F_k$  závislou na potenciální energii vnějších sil do vztahu (2.28), případně analogicky posuv  $u_k$  závislý na komplementární potenciální energii vnějších sil do vztahu (2.29) [5].

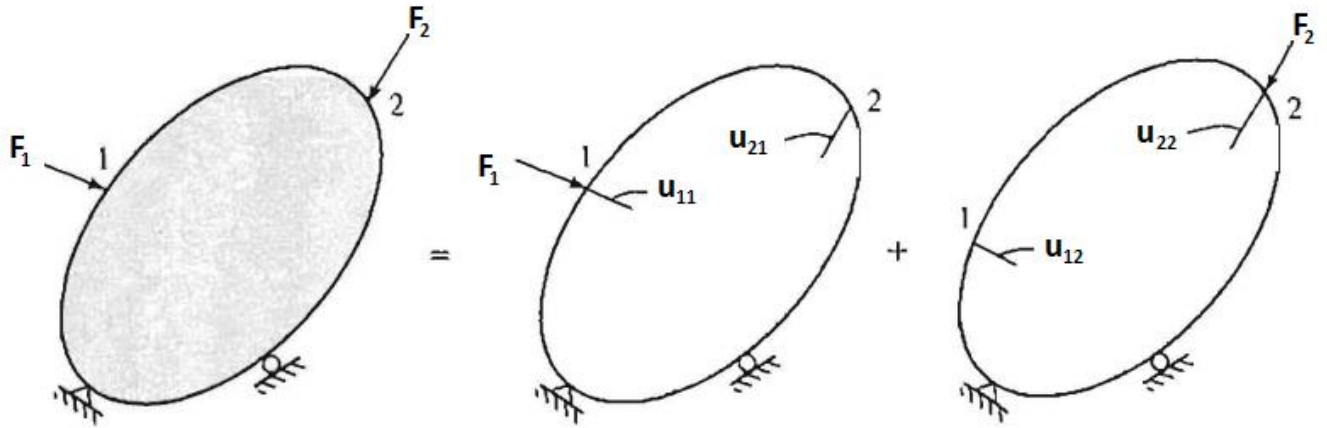
$$F_k = -\frac{\partial V}{\partial u_k} \quad (2.28)$$

$$u_k = -\frac{\partial V^*}{\partial F_k} \quad (2.29)$$

Rozdíl mezi principem virtuálních posuvů a principem minima celkové potenciální energie spočívá v tom, že princip virtuálních posuvů udává rovnice rovnováhy pro napětí a princip minima celkové potenciální energie udává rovnice rovnováhy pro posuvy [8].

### 3. Bettiho věta

Pokud na lineárně pružné těleso působí silové soustavy  $\pi_1 = \{F_1\}$  a  $\pi_2 = \{F_2\}$ , tak platí, že práce obou soustav na složkách deformace se rovnají (práce soustavy  $\pi_1$  byla vyvolána soustavou  $\pi_2$  a práce soustavy  $\pi_2$  byla vyvolána soustavou  $\pi_1$ ) [1].



Obr. 4 – těleso zatížené silami  $F_1$  a  $F_2$  – superpozice [6]

Uvažované těleso na obrázku 4 je ve statické rovnováze. Deformační posuv v důsledku jednotlivých sil je uvažován samostatně – princip superpozice. Tato úvaha je možná pouze pro lineárně elastický materiál. Složka posuvu  $u_{11}$  působí v bodě 1, ve směru síly  $F_1$  způsobené silou  $F_1$ . Složka posuvu  $u_{21}$  působí v bodě 2, ve směru síly  $F_2$  způsobené silou  $F_1$ . Složka posuvu  $u_{12}$  působí v bodě 1, ve směru síly  $F_1$  způsobené silou  $F_2$ . Složka posuvu  $u_{22}$  působí v bodě 2, ve směru síly  $F_2$  způsobené silou  $F_2$  [6].

Nechť je uvažováno zatížení pouze silou  $F_1$ . Po nabití její konečné hodnoty je těleso zatíženo silou  $F_2$ , přičemž hodnota síly  $F_1$  se nemění. Celková práce při takovém zatěžování je:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot u_{11} + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot u_{22} + F_1 \cdot u_{12} \quad (3.1)$$

Při zatížení nejprve silou  $F_2$  a následným zatížení silou  $F_1$  při neměnné hodnotě síly  $F_2$  je celková práce:

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot u_{22} + \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot u_{11} + F_2 \cdot u_{21} \quad (3.2)$$

Jelikož je zatížení v obou případech stejné a napjatost ani deformace nezávisí na historii zatěžování, tak platí [1]:

$$A_1 = A_2 \quad (3.3)$$

a tedy:

$$F_1 \cdot u_{12} = F_2 \cdot u_{21} \quad (3.4)$$

Práce vykonaná silami první silové soustavy při posuvu způsobeným druhou soustavou se rovná práci druhé soustavy při posuvu způsobeným první soustavou [6].

## 4. Maxwellův teorém reciprocity

Vyplývá z Bettiho věty. Je zavedena veličina posuv v bodě na jednotkovou zátěž  $\eta_{ij}$  (příčinkový součinitel [1]). Nutnou podmínkou je, že zatížení musí být jednotková ( $F_1 = F_2 = 1$ ). Jelikož je uvažováno těleso z lineárně elastického materiálu, tak platí:

$$u_{11} = F_1 \cdot \eta_{11} \quad u_{22} = F_2 \cdot \eta_{22} \quad u_{12} = F_2 \cdot \eta_{12} \quad u_{21} = F_1 \cdot \eta_{21}$$

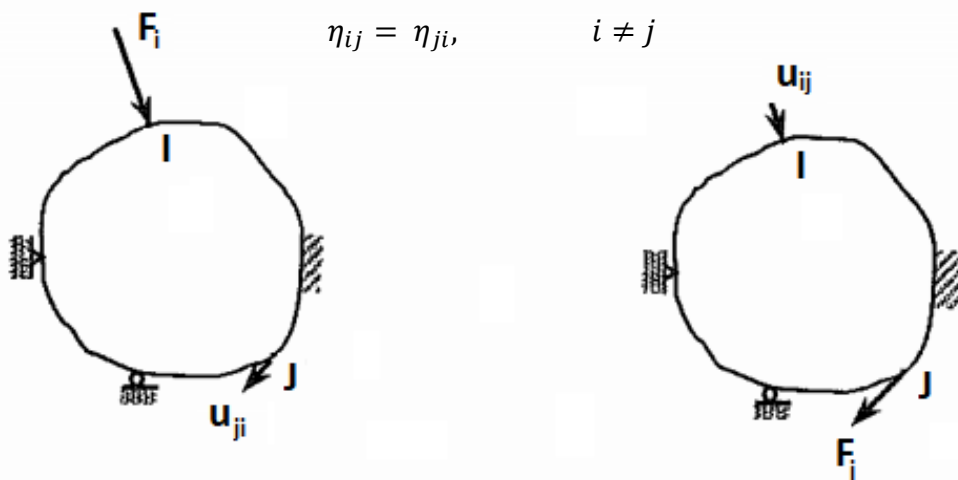
tedy:

$$u_{ij} = F_j \cdot \eta_{ij} \quad (4.1)$$

Protože jsou síly jednotkové, tak ze vztahu (3.4) vyplývá, že:

$$\eta_{12} = \eta_{21} \quad (4.2)$$

Pokud jsou na tělese (obrázek 5) dva body I a J a působí v nich síly  $F_i$  a  $F_j$ , tak platí [6]:



Obr. 5 – posuvy v bodech podle Maxwellova teorému reciprocity [8]

V lineárně elastickém tělese je posuv bodu I působením jednotkové síly působící v bodě J ve směru  $F_i$  roven posuvu bodu J působením jednotkové síly působící v bodě I ve směru  $F_j$  [8].

Nechť je těleso zatíženo  $n$  silami v  $n$  bodech, pak se celkový posuv v bodě I díky lineární vlastnosti materiálu vyjádří jako [6]:

$$u_i = F_1 \cdot \eta_{i1} + F_2 \cdot \eta_{i2} + \dots + F_j \cdot \eta_{ij} + F_n \cdot \eta_{in}$$

tedy:

$$u_i = \sum_{j=1}^n F_j \cdot \eta_{ij} \quad (4.3)$$

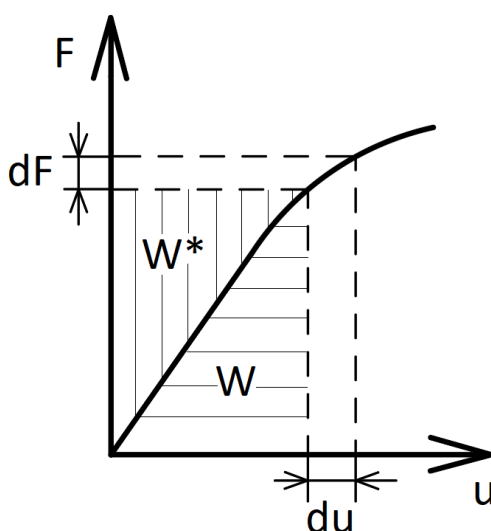
## 5. První Castiglianův teorém

Pokud je těleso zatěžováno silovou soustavou  $\pi$  obsahující síly  $F_i$  za vzniku posuvů  $u_i$ , tak dochází k vykonání práce. Energie zůstává zachována, tudíž je celková práce přeměněna na energii napjatosti. Platí tedy  $A = W$  [2].

$$A = W = \sum_{i=1}^n \int F_i \cdot du_i \quad (5.1)$$

Při změně působící síly o hodnotu  $dF$  se rovnice (5.1) upraví do tvaru [6]:

$$dW = F_i \cdot du_i \rightarrow F_i = \frac{\partial W}{\partial u_i} \quad (5.2)$$



Obr. 6 – závislost působící síly  $F$  na posuvu  $u$  [6]

Pro moment síly a úhel natočení střednice prutu ( $u$  ohybu), nebo úhel natočení příčného průřezu okolo střednice prutu ( $u$  krutu) analogicky platí [8]:

$$M_i = \frac{\partial W}{\partial \varphi_i} \quad (5.3)$$

První Castiglianův teorém je možné také odvodit z principu virtuálních prací. Jelikož je energie napjatosti funkční hodnotou zobecněných posuvů, tak pro změnu energie napjatosti platí:

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial u_i} \cdot \delta u_i \quad (5.4)$$

Dosazením rovnice (5.4) do vztahu (2.21) a následným porovnáním se vztahem (2.15) se dojde k získání hledaného vztahu (5.2) definujícího první Castiglianův teorém [5].

Působí-li na elastické těleso, které je ve statické rovnováze, zatížení silou  $F$  a jeho energie napjatosti  $W$  je závislá na posuvu  $u$ , tak parciální derivace energie napjatosti  $W$  podle posuvu  $u$  se rovná síle, která posuv způsobuje. Platí pro tělesa, která jsou vyrobena z materiálu s lineárně i nelineárně elastickou strukturou [6].

## 6. Druhý Castiglianův teorém

Jestliže působí na lineárně elastické těleso soustava osamělých sil  $\pi$  s různými působišti, tak se práce soustavy sil určí podle vztahu [1]:

$$A = \frac{1}{2} \cdot F_1 \cdot u_1 + \frac{1}{2} \cdot F_2 \cdot u_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot F_n \cdot u_n = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i \right) \quad (6.1)$$

Jelikož je práce soustavy sil dokonale přeměněna na energii napjatosti, tak platí:

$$A = W = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i \right) \quad (6.2)$$

dosazením rovnice (4.3) se získá tvar:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i \cdot F_j \cdot \eta_{ij} \right) \quad (6.3)$$

Energie napjatosti je závislá na všech silách silové soustavy  $\pi$ . Po provedení parciální derivace energie napjatosti podle síly  $F_k$  se získá:

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial F_k} \cdot F_j \cdot \eta_{ji} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i \cdot \frac{\partial F_j}{\partial F_k} \cdot \eta_{ji} \right) \quad (6.4)$$

Pokud se  $i = k$  a současně  $j = k$ , tak jsou parciální derivace v sumě rovny jedné. Z toho vyplývá řešení:

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{j=1}^n F_j \cdot \eta_{jk} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{i=1}^n F_i \cdot \eta_{ki} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{j=1}^n F_j \cdot (\eta_{jk} + \eta_{kj}) \right] \quad (6.5)$$

ze vztahu (4.2) plyne:

$$\frac{\partial W}{\partial F_k} = \sum_{j=1}^n F_j \cdot \eta_{kj} \quad (6.6)$$

tedy:

$$u_k = \frac{\partial W}{\partial F_k} \quad (6.7)$$

Působí-li na lineárně elastické těleso silová soustava, pak posuv působiště síly po její nositelce se získá parciální derivací energie napjatosti zatěžovaného tělesa podle síly, v jejímž směru je posuv zjišťován [6].

Pro zjištění úhlu natočení střednice lineárně elastického tělesa ve směru působení dvojice sil, jehož působiště je pevně spojeno se střednicí, se energie napjatosti tělesa parciálně derivuje podle momentu, který leží ve stejné rovině jako střednice [1]:

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} \quad (6.8)$$

Druhý Castiglianův teorém lze odvodit také skrze komplementární energii napjatosti. Z obrázku 6 je patrné, že tuto energii lze určit jako:

$$W^* = \sum_{i=1}^n \int u_i \cdot dF_i \quad (6.9)$$

Při změně posuvu o hodnotu  $du$  se rovnice (6.9) upraví do tvaru:

$$dW^* = u_i \cdot dF_i \rightarrow u_i = \frac{\partial W^*}{\partial F_i} \quad (6.10)$$

Tento vztah je platný pro lineárně i nelineárně elastická tělesa. Pokud je však materiál lineárně elastický, tak se vztah (6.10) rovná vztahu (6.7) [6].

Druhý Castiglianův teorém je možné odvodit i z principu virtuálních prací. Jelikož je komplementární energie napjatosti funkční hodnotou zobecněných sil, tak pro změnu komplementární energie napjatosti platí:

$$\delta W^* = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W^*}{\partial F_k} \cdot \delta F_k \quad (6.11)$$

Při dosazení vztahu (6.11) do vztahu  $\delta W^* = \delta A^*$  a následným porovnáním se vztahem (2.18) se získá opět vztah (6.7) – za podmínky, že se jedná o lineárně elastický materiál [5].

Druhý Castiglianův teorém se také využívá při řešení staticky neurčitých úloh [10]. Prut se částečně uvolní na úroveň nepohyblivosti prutu bez omezení jeho deformace, místo odebraných vazeb se zavedou stykové síly a sestaví se vazbové deformační podmínky takové, aby se zajistila funkce odebrané vazby. Stupeň statické neurčitosti uložení prutu se musí rovnat množství vazbových deformačních podmínek. Druhý Castiglianův teorém vyjadřuje vazbovou deformační podmínku.

Maxwell-Mohrova varianta je postup na určení posuvu (nebo natočení) ve směru síly (nebo momentu). Varianta je použitelná, pokud jsou geometrické a materiálové charakteristiky nezávislé na zatížení, v jehož působišti je posuv vyšetřován. Složky VVÚ jsou lineárně závislé na tomto zatížení. Princip je založen na vztazích (6.7) a (6.8), kdy se parciálně derivuje energie napjatosti daného namáhání podle zatížení, které způsobuje výchylku. Například pro posuv při tahu, nebo ohybu (ve směru osy  $y$ ) za konstantního Youngova modulu pružnosti platí: [1]

$$u = \int_0^x \frac{N(x)}{E \cdot S(x)} \cdot \frac{\partial N(x)}{\partial F} \cdot dx, \quad \text{nebo} \quad v = \int_0^x \frac{M_z(x)}{E \cdot J_z(x)} \cdot \frac{\partial M_z(x)}{\partial F} \cdot dx \quad (6.12, 6.13)$$

Při určení posuvu (nebo natočení) v místě, kde těleso není zatíženo silou ani momentem, je využíváno tzv. doplňkové síly (momentu)  $Q$ . Síla je umístěna do místa, kde je vyšetřován posuv. Následně je určena komplementární energie napjatosti a po parciální derivaci podle doplňkové síly je doplňková síla položena nule [8].

$$u = \frac{\partial W^*}{\partial Q}, \quad \text{kde } Q = 0 \quad (6.14)$$

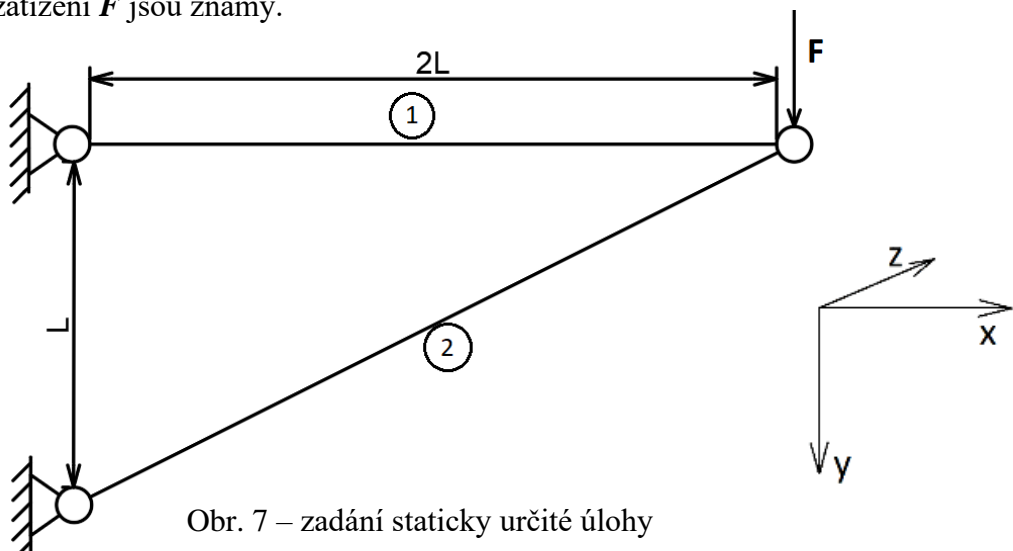
## 7. Aplikace teorie na příklady

Uvedené teorie budou aplikovány na příklady. Použit bude princip virtuální práce, první Castiglianův teorém a druhý Castiglianův teorém. Bude vyřešen jak staticky určitý příklad, tak staticky neurčitý příklad.

### 7.1. Staticky určitá úloha

Ve staticky určité úloze bude zjišťován posuv v horizontálním a vertikálním směru. Posuv bude spočítán pomocí principu virtuálních prací, prvního Castiglianova teorému a druhého Castiglianova teorému.

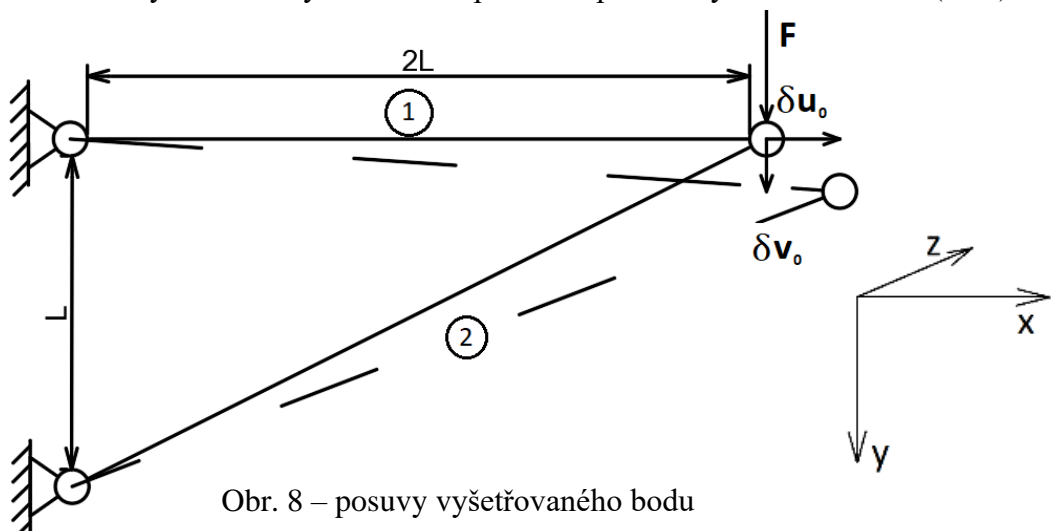
**Zadání:** U příkladu dle obrázku určete posuv místa působení síly  $F$  v horizontálním i vertikálním směru. Průměr prutů je  $d_1$  a  $d_2$ , pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu (lineárně elastického) – Youngův modul pružnosti je stejný. Průměry prutů, Youngův modul pružnosti, délky prutů a zatížení  $F$  jsou známy.



Obr. 7 – zadání staticky určité úlohy

#### 7.1.1. Řešení pomocí principu virtuálních prací

Nejprve se v obrázku vyznačí směry virtuálních posuvů a poté se vychází ze vztahu (2.15).



Obr. 8 – posuvy vyšetřovaného bodu

$$F_k \cdot \delta u_k = 0 \cdot \delta u_0 + F \cdot \delta v_0 = \int \int \int_{\Omega} \mathbf{T}_{\sigma}^T \cdot \delta \mathbf{T}_{\epsilon} \cdot d\Omega \quad (7.1)$$



Rozepsáním obecného vztahu pro zadaný příklad se získá:

$$\int \int_{\Omega} \mathbf{T}_{\sigma}^T \cdot \delta \mathbf{T}_{\varepsilon} \cdot d\Omega = \int_0^{2 \cdot L} \sigma_1 \cdot \delta \varepsilon_1 \cdot S_1 \cdot dL_1 + \int_0^{\sqrt{5} \cdot L} \sigma_2 \cdot \delta \varepsilon_2 \cdot S_2 \cdot dL_2 \quad (7.2)$$

Pro příčné průřezy prutů platí vztahy:

$$S_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \quad S_2 = \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \quad (7.3, 7.4)$$

Materiál je lineárně elastický, tudíž platí Hookův zákon:

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 \quad \sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 \quad (7.5a, 7.5b)$$

Jelikož jsou pruty vyrobeny ze stejného materiálu, tak platí:

$$E_1 = E_2 = E \quad (7.6)$$

Z obrázku 8 lze určit délkové přetvoření. Výraz lze zjednodušit za předpokladu, že  $u_0^2 = 0$ ,  $v_0^2 = 0$  a při uvažování  $L^2 \gg L \cdot u_0$  a také  $L^2 \gg L \cdot v_0$  lze součiny délky a prodloužení položit rovny nule:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{\sqrt{(2 \cdot L + u_0)^2 + v_0^2} - 2 \cdot L}{2 \cdot L} \approx \frac{u_0}{2 \cdot L} \quad (7.7)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta L_2}{L_2} = \frac{\sqrt{(2 \cdot L + u_0)^2 + (L - v_0)^2} - \sqrt{5} \cdot L}{\sqrt{5} \cdot L} \approx \frac{2 \cdot u_0 - v_0}{5 \cdot L} \quad (7.8)$$

Při zapsání délkového přetvoření v diferenciálním tvaru se získá tvar:

$$\delta \varepsilon_1 = \frac{\delta u_0}{2 \cdot L} \quad (7.9)$$

$$\delta \varepsilon_2 = \frac{2 \delta u_0 - \delta v_0}{5 \cdot L} \quad (7.10)$$

Po dosazení do rovnice (7.2) a spojením se vztahem (7.1):

$$\begin{aligned} 0 \cdot \delta u_0 + F \cdot \delta v_0 &= 2 \cdot L \cdot S_1 \cdot \sigma_1 \cdot \left( \frac{\delta u_0}{2 \cdot L} \right) + \sqrt{5} \cdot L \cdot S_2 \cdot \sigma_2 \cdot \left( \frac{2 \cdot \delta u_0 - \delta v_0}{5 \cdot L} \right) = \\ &= 2 \cdot L \cdot S_1 \cdot \sigma_1 \cdot \left( \frac{\delta u_0}{2 \cdot L} \right) + \sqrt{5} \cdot L \cdot S_2 \cdot \sigma_2 \cdot \left( \frac{2 \cdot \delta u_0}{5 \cdot L} \right) - \sqrt{5} \cdot L \cdot S_2 \cdot \sigma_2 \cdot \left( \frac{\delta v_0}{5 \cdot L} \right) = \end{aligned}$$

$$= \delta u_0 \cdot \left( S_1 \cdot \sigma_1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot S_2 \cdot \sigma_2 \right) + \delta v_0 \cdot \left( \frac{-\sqrt{5}}{5} \cdot S_2 \cdot \sigma_2 \right) \quad (7.11)$$

Nechť je uvažováno  $\delta u_0 = 1 \wedge \delta v_0 = 0$ :

$$S_1 \cdot \sigma_1 + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot S_2 \cdot \sigma_2 = 0 \quad (7.12)$$

$$S_1 \cdot E \cdot \frac{u_0}{2 \cdot L} + \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot S_2 \cdot E \cdot \left( \frac{2 \cdot u_0 - v_0}{5 \cdot L} \right) = 0 \quad (7.13)$$

Nyní je uvažováno  $\delta u_0 = 0 \wedge \delta v_0 = 1$ :

$$\frac{-\sqrt{5}}{5} \cdot S_2 \cdot \sigma_2 = F \quad (7.14)$$

$$\frac{-\sqrt{5}}{5} \cdot S_2 \cdot E \cdot \left( \frac{2 \cdot u_0 - v_0}{5 \cdot L} \right) = F \quad (7.15)$$

Po vyjádření  $v_0$  z rovnice (7.15) a jeho dosazení do rovnice (7.13) se získají hledané hodnoty posuvů  $u_0$  a  $v_0$ .

$$u_0 = \frac{4 \cdot F \cdot L}{S_1 \cdot E} \quad (7.16)$$

$$v_0 = \frac{F \cdot L}{E} \cdot \left( \frac{8}{S_1} + \frac{5\sqrt{5}}{S_2} \right) \quad (7.17)$$

### 7.1.2. Řešení pomocí prvního Castiglianova teorému

Pro vyjádření energie napjatosti se vyjde z rovnice (2.3), do které se dosadí vztah (2.5).

$$W = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega_i} E_i \cdot \varepsilon_i^2 \cdot d\Omega_i \right) \right] \quad (7.18)$$

Jelikož jsou pruty vyrobeny ze stejného materiálu, tak opět platí vztah (7.6):

$$E_1 = E_2 = E$$

Úpravou vztahu (7.18) se získá:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^{2 \cdot L} E \cdot S_1 \cdot \varepsilon_1^2 \cdot dL_1 + \int_0^{\sqrt{5} \cdot L} E \cdot S_2 \cdot \varepsilon_2^2 \cdot dL_2 \right) = \\ &= \frac{E}{2} \cdot \left[ 2 \cdot L \cdot S_1 \cdot \left( \frac{u_0}{2 \cdot L} \right)^2 + \sqrt{5} \cdot L \cdot S_2 \cdot \left( \frac{2 \cdot u_0 - v_0}{5 \cdot L} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.19)$$

Energie napjatosti je závislá na posuvech  $u_0$  a  $v_0$ . Následují parciální derivace energie napjatosti podle posuvů v jednotlivých směrech – vztah (5.2).

$$\frac{\partial W}{\partial u_0} = \frac{E}{2} \cdot \left[ \frac{S_1 \cdot u_0}{L} + \frac{8\sqrt{5} \cdot S_2 \cdot u_0}{25 \cdot L} - \frac{4\sqrt{5} \cdot S_2 \cdot v_0}{25 \cdot L} \right] = 0 \quad (7.20)$$

$$\frac{\partial W}{\partial v_0} = \frac{E}{2} \cdot \left[ \frac{-4\sqrt{5} \cdot S_2 \cdot u_0}{25 \cdot L} + \frac{2\sqrt{5} \cdot S_2 \cdot v_0}{25 \cdot L} \right] = F \quad (7.21)$$

Po vyjádření  $v_0$  z rovnice (7.21) a jeho dosazení do rovnice (7.20) se získá hledaný vztah pro posuvy  $u_0$  a  $v_0$ . Jedná se o totožné vztahy jako (7.16) a (7.17).

$$u_0 = \frac{4 \cdot F \cdot L}{S_1 \cdot E}$$

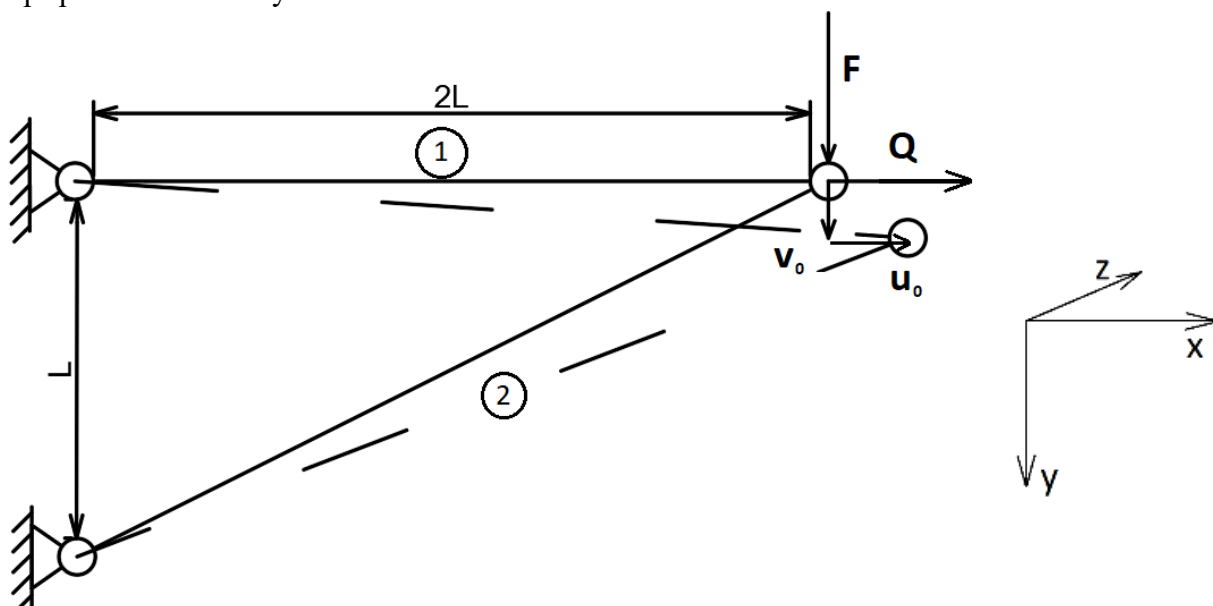
$$v_0 = \frac{F \cdot L}{E} \cdot \left( \frac{8}{S_1} + \frac{5\sqrt{5}}{S_2} \right)$$

### 7.1.3. Řešení pomocí druhého Castiglianova teorému

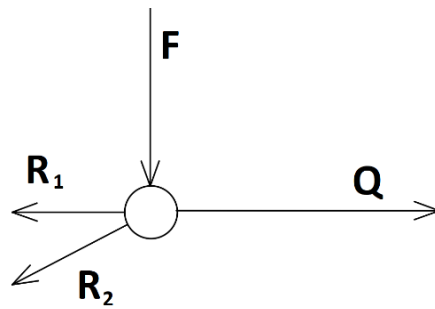
Jelikož ze zadání je materiál lineárně elastický, tak platí, že energie napjatosti se rovná komplementární energii napjatosti. Pro vyjádření komplementární energie napjatosti je proto opět možné vycházet z rovnice (2.12), do které se dosadí vztah (2.5).

$$W^* = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega_i} \frac{\sigma_i^2}{E_i} \cdot d\Omega_i \right) \right] \quad (7.22)$$

Pro jištění posuvu v horizontálním směru je nutné zavést doplňkovou sílu  $Q$ , která je v tomto případě řešení nezbytná.



Obr. 9 – příklad s přidanou doplňkovou silou



Obr. 10 – uvolněný styčník

Po sestavení rovnice silové rovnováhy ve styčníku se získají síly v prutech.

$$R_1 = Q + 2 \cdot F \quad R_2 = -\sqrt{5} \cdot F \quad (7.23a, 7.23b)$$

Pro napětí v prutech platí:

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{R_1}{S_1} \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{R_2}{S_2} \quad (7.24a, 7.24b)$$

Jelikož jsou pruty vyrobeny ze stejného materiálu, tak opět platí vztah (7.6):

$$E_1 = E_2 = E$$

Po dosazení do rovnice (7.22) se získá:

$$W^* = \frac{1}{2} \cdot \left[ \int_0^{2 \cdot L} \frac{S_1}{E} \cdot \left( \frac{Q + 2 \cdot F}{S_1} \right)^2 \cdot dL_1 + \int_0^{\sqrt{5} \cdot L} \frac{S_2}{E} \cdot \left( \frac{-\sqrt{5} \cdot F}{S_2} \right)^2 \cdot dL_2 \right] \quad (7.25)$$

$$W^* = \frac{L}{2 \cdot E} \cdot \left[ \frac{2 \cdot (Q + 2 \cdot F)^2}{S_1} + \frac{\sqrt{5} \cdot (-\sqrt{5} \cdot F)^2}{S_2} \right] \quad (7.26)$$

Komplementární energie napjatosti je závislá na silách  $F$  a  $Q$ . Následují parciální derivace komplementární energie napjatosti podle sil v jednotlivých směrech – vzorec (6.10). Po derivování je doplňková síla  $Q$  položena nule. Jedná se o totožné vztahy jako (7.16) a (7.17).

$$u_0 = \frac{\partial W^*}{\partial Q} = \frac{L}{2 \cdot E} \cdot \left[ \frac{8 \cdot F}{S_1} + \frac{4 \cdot Q}{S_1} \right] = \frac{4 \cdot F \cdot L}{E \cdot S_1}$$

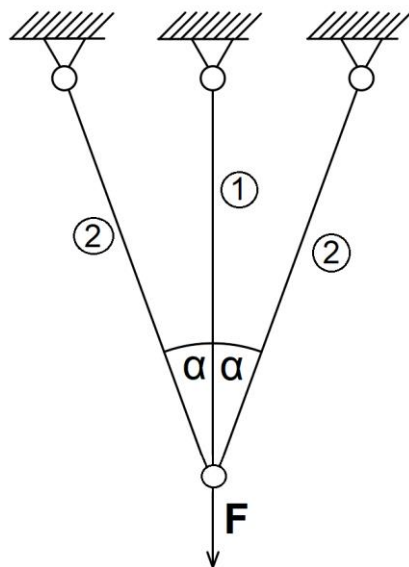
$$v_0 = \frac{\partial W^*}{\partial F} = \frac{L}{2 \cdot E} \cdot \left[ \frac{16 \cdot F}{S_1} + \frac{8 \cdot Q}{S_1} + \frac{10\sqrt{5} \cdot F}{S_2} \right] = \frac{F \cdot L}{E} \cdot \left( \frac{8}{S_1} + \frac{5\sqrt{5}}{S_2} \right)$$

## 7.2. Staticky neurčitá úloha

Ve staticky neurčité úloze bude zjišťována síla, kterou jsou natahovány pruty. Síla se spočítá pomocí prvního Castiglianova teorému (pro lineárně i nelineárně elastický materiál) a druhého Castiglianova teorému.

**Zadání:** U příkladu dle obrázku určete jednotlivé síly, kterými jsou natahovány pruty. Pro napětí lineárně elastického materiálu platí Hookův zákon (materiálové charakteristiky převzaty z [2]), pro nelineárně elastický materiál platí vztah:

$$\sigma_1 = E_1 \cdot \varepsilon_1 - K_1 \cdot \varepsilon_1^2 \quad \sigma_2 = E_2 \cdot \varepsilon_2 - K_2 \cdot \varepsilon_2^2 \quad (7.27, 7.28)$$



### Znamé hodnoty:

$$\begin{aligned} F &= 9,5 \text{ kN} = 9500 \text{ N}, \\ E_1 &= 210 \text{ GPa} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \\ E_2 &= 205 \text{ GPa} = 2,05 \cdot 10^{11} \text{ Pa}, \\ L_1 &= 0,5 \text{ m}, \\ \alpha &= 20^\circ \rightarrow L_2 = 0,532 \text{ m}, \\ d_1 &= 5 \text{ mm} = 0,005 \text{ m} \\ d_2 &= 6 \text{ mm} = 0,006 \text{ m} \\ K_1 &= 70\,000 \text{ GPa} = 7 \cdot 10^{13} \text{ Pa}, \\ K_2 &= 65\,000 \text{ GPa} = 6,5 \cdot 10^{13} \text{ Pa} \end{aligned}$$

Podle vztahů (7.3, 7.4):

$$\begin{aligned} S_1 &= 1,9635 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \\ S_2 &= 2,8274 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2, \end{aligned}$$

Obr. 11 – zadání staticky neurčité úlohy

### 7.2.1. Řešení sil v lineárně elastickém materiálu prvním Castiglianovým teorémem

Energie napjatosti se vyjádří z rovnice (5.1).

$$W = \sum_{i=1}^n \int F_i \cdot du_i = \int F_1 \cdot du_1 + 2 \cdot \int F_2 \cdot du_2 \quad (7.29)$$

Síla, která natahuje prut, se vyjádří ze vztahu (7.24a) a z Hookova zákona:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S_i} = E_i \cdot \varepsilon_i = E_i \cdot \frac{u_i}{L_i} \rightarrow F_i = \frac{E_i \cdot S_i}{L_i} \cdot u_i \quad (7.30)$$

Dosazením vztahu (7.30) do vztahu (7.29) se získá:

$$W = \int \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot u_1 \cdot du_1 + 2 \cdot \int \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_2 \cdot du_2 = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot \frac{u_1^2}{2} + \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_2^2 \quad (7.31)$$

Pro posuvy prutů 1 a 2 platí:

$$u_2 = u_1 \cdot \cos(\alpha) \quad (7.32)$$

Dosazením vztahu (7.32) do (7.31) se vztah pro energii napjatosti upraví do tvaru:

$$W = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot \frac{u_1^2}{2} + \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_1^2 \cdot \cos^2(\alpha) \quad (7.33)$$

Energie napjatosti je závislá na posuvu  $u_1$ . Následuje parciální derivace energie napjatosti podle posuvu ve směru síly  $F$  – vztah (5.2).

$$\frac{\partial W}{\partial u_1} = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot u_1 + \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot 2 \cdot u_1 \cdot \cos^2(\alpha) = F \quad (7.34)$$

$$u_1 = \frac{F}{\frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} + \frac{2 \cdot E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot \cos^2(\alpha)} = \quad (7.35)$$

$$= \frac{9500}{\frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{0,5} + \frac{2 \cdot 2,05 \cdot 10^{11} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}{0,532} \cdot \cos^2(20^\circ)} =$$

$$= 3,456 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Po dosazení hodnot do vztahu (7.30) a (7.32) se získají hledané síly.

$$F_1 = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot u_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{0,5} \cdot 3,456 \cdot 10^{-4} = 2850 \text{ N}$$

$$u_2 = u_1 \cdot \cos(\alpha) = 3,456 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(20^\circ) = 3,248 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$F_2 = \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_2 = \frac{2,05 \cdot 10^{11} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}{0,532} \cdot 3,248 \cdot 10^{-4} = 3538 \text{ N}$$

## 7.2.2. Řešení sil v lineárně elastickém materiálu druhým Castiglianovým teorémem

Jelikož je materiál lineárně elastický, tak platí, že energie napjatosti se rovná komplementární energii napjatosti. Pro vyjádření komplementární energie napjatosti je proto možné vycházet z rovnice (2.5), která se dosadí do vztahu (2.12).

$$W^* = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega_i} \frac{\sigma_i^2}{E_i} \cdot d\Omega_i \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1} \cdot \sigma_1^2 \cdot dL_1 + 2 \cdot \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2} \cdot \sigma_2^2 \cdot dL_2 \right) \quad (7.36)$$

Pro napětí v prutech platí (7.24a, 7.24b):

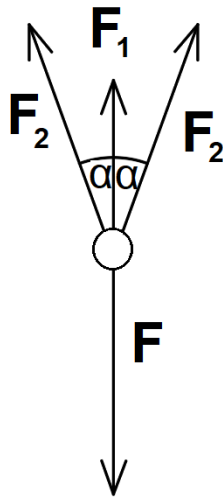
$$\sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} \quad \sigma_2 = \frac{F_2}{S_2}$$

Dosazením vztahu (7.24a) a (7.24b) do vztahu (7.36) a následnou integrací se získá vztah pro komplementární energii napjatosti ve tvaru:

$$W^* = \frac{1}{2} \cdot \left[ \sum_{i=1}^2 \left( \int_{\Omega_i} \frac{\sigma_i^2}{E_i} \cdot d\Omega_i \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \left( \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1} \cdot \left( \frac{F_1}{S_1} \right)^2 \cdot dL_1 + 2 \cdot \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2} \cdot \left( \frac{F_2}{S_2} \right)^2 \cdot dL_2 \right) \quad (7.37)$$

$$W^* = \frac{F_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot E_1 \cdot S_1} + \frac{F_2^2 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2} \quad (7.38)$$

Po sestavení rovnice silové rovnováhy v místě působení síly se získají jednotlivé síly působící na pruty.



$$F = F_1 + 2 \cdot F_2 \cdot \cos(\alpha)$$

Pro jednotlivé síly tedy platí:

$$F_1 = F - 2 \cdot F_2 \cdot \cos(\alpha) \quad (7.39)$$

$$F_2 = \frac{F}{2 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{F_1}{2 \cdot \cos(\alpha)} \quad (7.40)$$

Obr. 12 – uvolnění sil v místě zatížení soustavy

Dosazením vztahů (7.39) a (7.40) do (7.38) bude komplementární energie napjatosti závislá na síle  $F_2$  (7.41) a v druhém případě na síle  $F_1$  (7.42). Poté následují parciální derivace komplementární energie napjatosti podle sil  $F_1$  a  $F_2$  – vzorec (6.10).

$$W^*(F_2) = \frac{F^2 \cdot L_1}{2 \cdot E_1 \cdot S_1} - \frac{4 \cdot F \cdot F_2 \cdot L_1 \cdot \cos(\alpha)}{2 \cdot E_1 \cdot S_1} + \frac{4 \cdot F_2^2 \cdot L_1 \cdot \cos^2(\alpha)}{2 \cdot E_1 \cdot S_1} + \frac{F_2^2 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2} \quad (7.41)$$

$$W^*(F_1) = \frac{F_1^2 \cdot L_1}{2 \cdot E_1 \cdot S_1} + \frac{F^2 \cdot L_2}{4 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} - \frac{F \cdot F_1 \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} + \frac{F_1^2 \cdot L_2}{4 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} \quad (7.42)$$

$$u_2 = \frac{\partial W^*(F_2)}{\partial F_2} = - \frac{2 \cdot F \cdot L_1 \cdot \cos(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{4 \cdot F_2 \cdot L_1 \cdot \cos^2(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{2 \cdot F_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2} \quad (7.43)$$

$$u_1 = \frac{\partial W^*(F_1)}{\partial F_1} = \frac{F_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot S_1} - \frac{F \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} + \frac{F_1 \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} \quad (7.44)$$

Stejně jako při řešení pomocí prvního Castiglianova teorému platí pro posuvy vztah (7.32):

$$u_2 = u_1 \cdot \cos(\alpha)$$

Dosazením rovností (7.43) a (7.44) do vztahu (7.32) se získá rovnice:

$$\begin{aligned} & -\frac{2 \cdot F \cdot L_1 \cdot \cos(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{4 \cdot F_2 \cdot L_1 \cdot \cos^2(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{2 \cdot F_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2} = \\ & = \frac{F_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot S_1} \cdot \cos(\alpha) - \frac{F \cdot L_2}{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} + \frac{F_1 \cdot L_2}{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} \end{aligned} \quad (7.45)$$

Po dosazení (7.39) do (7.45) lze vyjádřit hodnotu hledané síly  $F_2$ :

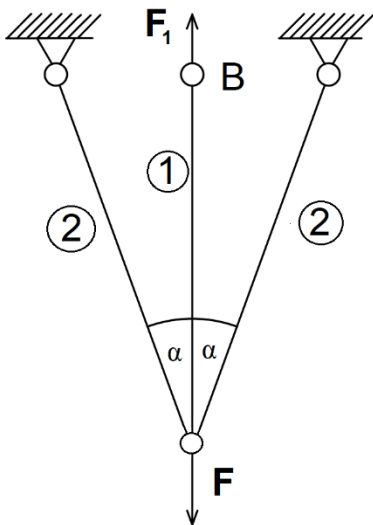
$$\begin{aligned} & -\frac{2 \cdot F \cdot L_1 \cdot \cos(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{4 \cdot F_2 \cdot L_1 \cdot \cos^2(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{2 \cdot F_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2} = \\ & = \frac{F \cdot L_1}{E_1 \cdot S_1} \cdot \cos(\alpha) - \frac{2 \cdot F_2 \cdot L_1}{E_1 \cdot S_1} \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{F_2 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2} \end{aligned} \quad (7.46)$$

$$F_2 = \frac{\frac{3 \cdot F \cdot L_1 \cdot \cos(\alpha)}{E_1 \cdot S_1}}{\frac{6 \cdot L_1 \cdot \cos^2(\alpha)}{E_1 \cdot S_1} + \frac{3 \cdot L_2}{E_2 \cdot S_2}} \quad (7.47)$$

$$F_2 = \frac{\frac{3 \cdot 9500 \cdot 0,5 \cdot \cos(20^\circ)}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}}{\frac{6 \cdot 0,5 \cdot \cos^2(20^\circ)}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}} + \frac{3 \cdot 0,532}{2,05 \cdot 10^{11} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}} = 3538 \text{ N}$$

Dosazením síly  $F_2$  do vztahu (7.39) se získá hodnota hledané síly  $F_1$ .

$$F_1 = F - 2 \cdot F_2 \cdot \cos(\alpha) = 9500 - 2 \cdot 3538 \cdot \cos(20^\circ) = 2850 \text{ N}$$



Dalším možným řešením této úlohy pomocí druhého Castiglianova teorému je vyžití částečného uvolnění. Po částečném uvolnění se sestaví rovnice statické rovnováhy (7.40), následuje stanovení komplementární energie napjatosti v závislosti na síle  $F_1$  (7.42). Poté se sestaví vazbová deformační podmínka v bodě B:

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{\partial W^*(F_1)}{\partial F_1} = \frac{F_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot S_1} - \\ & - \frac{F \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} + \frac{F_1 \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} = 0 \end{aligned} \quad (7.48)$$

Obr. 13 – částečné uvolnění zadaného příkladu



Z rovnice (7.48) se vyjádří velikost síly  $F_1$ :

$$F_1 = \frac{F \cdot L_2 \cdot E_1 \cdot S_1}{2 \cdot L_1 \cdot E_2 \cdot S_2 \cdot \cos^2(\alpha) + L_2 \cdot E_1 \cdot S_1} \quad (7.49)$$

$$F_1 = \frac{9500 \cdot 0,532 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{2 \cdot 0,5 \cdot 2,05 \cdot 10^{11} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5} \cdot \cos^2(20^\circ) + 0,532 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}$$

$$F_1 = 2850 \text{ N}$$

Dosazením síly  $F_1$  do vztahu (7.40) se získá hodnota síly  $F_2$ .

$$F_2 = \frac{F}{2 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{F_1}{2 \cdot \cos(\alpha)} = \frac{9500}{2 \cdot \cos(20^\circ)} - \frac{2850}{2 \cdot \cos(20^\circ)} = 3538 \text{ N}$$

Tuto úlohu lze vyřešit i pomocí Maxwell-Mohrovy varianty, podmínky jejího použití jsou splněny. Vyjde se ze vztahu (6.12), který se rozepíše:

$$u_B = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F_1} \quad (7.50)$$

Jelikož platí, že  $N_1 = F_1$  a  $N_2 = N_3 = F_2$ , tak vztah (7.50) za využití vztahu (7.40) lze upravit:

$$u_B = \frac{F_1 \cdot L_1}{E_1 \cdot S_1} - \frac{F \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} + \frac{F_1 \cdot L_2}{2 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot E_2 \cdot S_2} = 0 \quad (7.51)$$

Z rovnice (7.51) se opět vyjádří síla  $F_1$  a jejím následným dosazením do (7.40) se získá velikost síly  $F_2$ , postup je analogický jako v případě částečného uvolnění.

### 7.2.3. Řešení sil v nelineárně elastickém materiálu prvním Castiglianovým teorémem

Stejně jako u lineárně elastického materiálu platí pro energii napjatosti vztah (7.29).

$$W = \sum_{i=1}^n \int F_i \cdot du_i = \int F_1 \cdot du_1 + 2 \cdot \int F_2 \cdot du_2$$

Síla, která natahuje prut, se vyjádří ze vztahu (7.24 a), ovšem pro nelineárně elastický materiál již neplatí Hookův zákon:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S_i} = E_i \cdot \varepsilon_i - K_i \cdot \varepsilon_i^2 = E_i \cdot \frac{u_i}{L_i} - K_i \cdot \left(\frac{u_i}{L_i}\right)^2 \rightarrow F_i = \frac{E_i \cdot S_i}{L_i} \cdot u_i - \frac{K_i \cdot S_i}{L_i^2} \cdot u_i^2 \quad (7.52)$$

Dosazením vztahu (7.52) do (7.29) se získá:

$$W = \int \left( \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot u_1 - \frac{K_1 \cdot S_1}{L_1^2} \cdot u_1^2 \right) \cdot du_1 + 2 \cdot \int \left( \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_2 - \frac{K_2 \cdot S_2}{L_2^2} \cdot u_2^2 \right) \cdot du_2 \quad (7.53)$$

$$W = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot \frac{u_1^2}{2} - \frac{K_1 \cdot S_1}{L_1^2} \cdot \frac{u_1^3}{3} + \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_2^2 - \frac{2 \cdot K_2 \cdot S_2}{L_2^2} \cdot \frac{u_2^3}{3} \quad (7.54)$$

Pro posuvy prutů 1 a 2 opět platí vztah (7.32):

$$u_2 = u_1 \cdot \cos(\alpha)$$

Dosazením vztahu (7.32) do (7.54) se vztah pro energii napjatosti upraví do tvaru:

$$W = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot \frac{u_1^2}{2} - \frac{K_1 \cdot S_1}{L_1^2} \cdot \frac{u_1^3}{3} + \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_1^2 \cdot \cos^2(\alpha) - \frac{2 \cdot K_2 \cdot S_2}{3 \cdot L_2^2} \cdot u_1^3 \cdot \cos^3(\alpha) \quad (7.55)$$

Energie napjatosti je závislá na posuvu  $u_1$ . Následuje parciální derivace energie napjatosti podle posuvu  $u_1$  ve směru síly  $F$  – vztah (5.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u_1} &= \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot u_1 - \frac{K_1 \cdot S_1}{L_1^2} \cdot u_1^2 + \frac{2 \cdot E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_1 \cdot \cos^2(\alpha) - \\ &\quad - \frac{2 \cdot K_2 \cdot S_2}{L_2^2} \cdot u_1^2 \cdot \cos^3(\alpha) = F \end{aligned} \quad (7.56)$$

Vztah (7.56) se upraví do tvaru kvadratické rovnice  $a \cdot u_1^2 + b \cdot u_1 + c = 0$ , kde:

$$a = - \frac{K_1 \cdot S_1}{L_1^2} - \frac{2 \cdot K_2 \cdot S_2}{L_2^2} \cdot \cos^3(\alpha) \quad (7.57)$$

$$a = - \frac{7 \cdot 10^{13} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{0,5^2} - \frac{2 \cdot 6,5 \cdot 10^{13} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}{0,532^2} \cdot \cos^3(20^\circ)$$

$$a = -16273978850 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$b = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} + \frac{2 \cdot E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot \cos^2(\alpha) \quad (7.58)$$

$$b = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{0,5} + \frac{2 \cdot 2,05 \cdot 10^{11} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}{0,532} \cdot \cos^2(20^\circ)$$

$$b = 27487853,8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$c = -F = -9500 \text{ N}$$

Následuje určení kořenů kvadratické rovnice.

$$u_{1a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = 4,847 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$u_{1b} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = 1,204 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Z vypočtených hodnot je hledanou a nadále uvažovanou ta menší, jelikož nastane při namáhání jako první (viz. obrázky 14 a 15). Menší hodnota je dosazena do vztahu (7.52).

$$F_1 = \frac{E_1 \cdot S_1}{L_1} \cdot u_{1a} - \frac{K_1 \cdot S_1}{L_1^2} \cdot u_{1a}^2$$

$$F_1 = \frac{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{0,5} \cdot 4,847 \cdot 10^{-4} - \frac{7 \cdot 10^{13} \cdot 1,9635 \cdot 10^{-5}}{0,5^2} \cdot (4,847 \cdot 10^{-4})^2$$

$$F_1 = 2706 \text{ N}$$

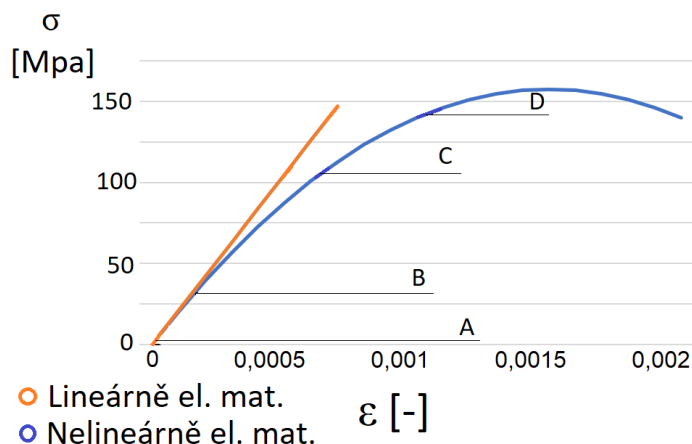
$$u_2 = u_{1a} \cdot \cos(\alpha) = 4,847 \cdot 10^{-4} \cdot \cos(20^\circ) = 4,555 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$F_2 = \frac{E_2 \cdot S_2}{L_2} \cdot u_2 - \frac{K_2 \cdot S_2}{L_2^2} \cdot u_2^2$$

$$F_2 = \frac{2,05 \cdot 10^{11} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}{0,532} \cdot 4,555 \cdot 10^{-4} - \frac{6,5 \cdot 10^{13} \cdot 2,8274 \cdot 10^{-5}}{0,532^2} \cdot (4,555 \cdot 10^{-4})^2$$

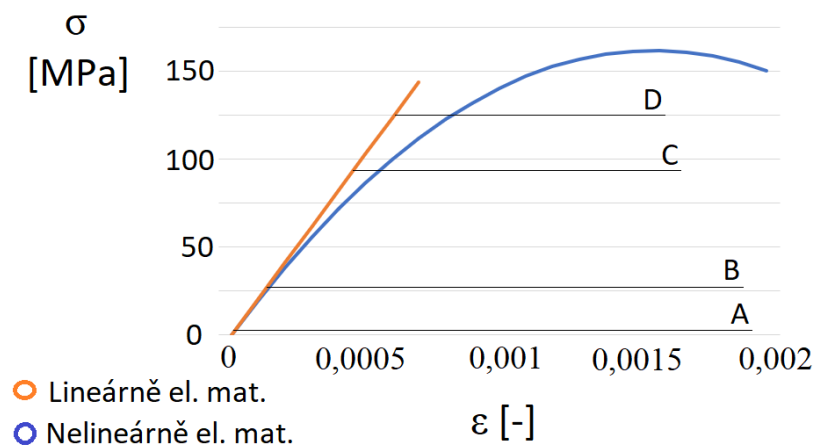
$$F_2 = 3615 \text{ N}$$

Z výsledku příkladu nelineárně elastického materiálu lze pozorovat, že se od výsledků v případě lineárně elastického materiálu liší velikost síly  $F_1$  o 144 N, zatímco velikost síly  $F_2$  o 77 N. Z obrázku 14 a 15 je patrné, že pro zvětšující se normálové napětí (a tedy i větší zatížení  $F$ ) se zvětšuje i rozdíl velikosti sil  $F_1$  a  $F_2$  v lineárně a nelineárně elastickém materiálu. Pokud by zatížení  $F$  bylo řádově menší, tak by rozdíl velikosti sil byl téměř zanedbatelný.



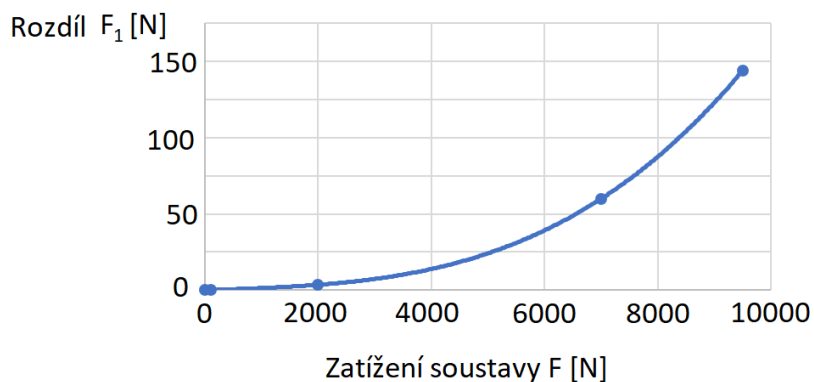
V bodě A je soustava zatížena silou  $F = 100 \text{ N}$ , rozdíl sil  $F_1$  mezi lineárně a nelineárně elastickým materiálem je 0,007 N. V bodě B je soustava zatížena silou  $F = 2000 \text{ N}$ , rozdíl sil  $F_1$  mezi lineárně a nelineárně elastickým materiálem je 3,5 N. V bodě C je soustava zatížena silou  $F = 7000 \text{ N}$ , rozdíl sil  $F_1$  mezi lineárně a nelineárně elastickým materiálem je 60 N. Bod D odpovídá výše uvedenému výpočtu.

Obr. 14 – graf závislost  $\sigma(\epsilon)$  pro prut 1

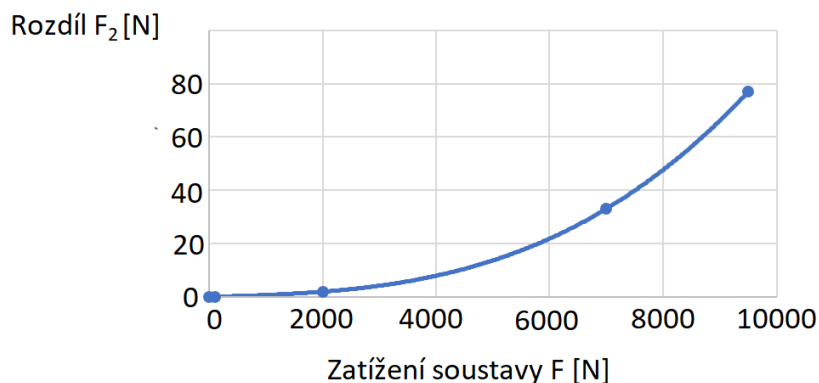


Obr. 15 – graf závislost  $\sigma(\epsilon)$  pro prut 2

V bodě A je soustava zatížena silou  $F = 100$  N, rozdíl sil  $F_2$  mezi lineárně a nelineárně elastickým materiálem je 0,001 N. V bodě B je soustava zatížena silou  $F = 2000$  N, rozdíl sil  $F_2$  mezi lineárně a nelineárně elastickým materiálem je 1,9 N. V bodě C je soustava zatížena silou  $F = 7000$  N, rozdíl sil  $F_2$  mezi lineárně a nelineárně elastickým materiálem je 33 N. Bod D odpovídá výše uvedenému výpočtu.



Obr. 16 – rozdíl velikosti síly  $F_1$  v lineárně a nelineárně elastickém materiálu v závislosti na velikosti zatížení soustavy silou  $F$



Obr. 17 – rozdíl velikosti síly  $F_2$  v lineárně a nelineárně elastickém materiálu v závislosti na velikosti zatížení soustavy silou  $F$

## Závěr

Tato bakalářská práce popsala základní energetické principy v pružnosti a pevnosti a jejich souvislost se silovým působením na soustavu a posuvy způsobené silovým zatížením. Byly objasněny termíny jako energie napjatosti, celková potenciální energie, komplementární energie napjatosti atd. Důraz byl kladen na rozlišení situací, kdy vztahy platí pro lineárně elastický a nelineárně elastický materiál. Dále byly objasněny základy principu virtuální práce. Následoval popis Bettiho věty a Maxwellova teorému reciprocity.

Všechny objasněné pojmy byly následně použity k odvození prvního a druhého Castiglianova teorému. První Castiglianův teorém platí pro lineárně i nelineárně elastický materiál. Druhý Castiglianův teorém se používá pouze pro lineárně elastická tělesa, kdy je energie napjatosti rovna komplementární energii napjatosti. Poslední část práce obsahuje aplikaci popsaných teorémů na praktických příkladech.

U staticky určité úlohy byl určen posuv v horizontálním i vertikálním směru pro lineárně elastický materiál. Bylo ukázáno, že princip virtuálních prací i oba Castiglianovy teorémy vedou ke stejnému výsledku.

U staticky neurčité úlohy byly spočítány síly v prutech. První a druhý Castiglianův teorém vedou ke stejnému výsledku při řešení lineárně elastického materiálu. Výsledné síly a posuvy jsou při řešení nelineárně elastického materiálu pomocí prvního Castiglianova teorému jiné než u lineárně elastického materiálu. Rozdíl ve výsledcích vyšetřovaných sil v prutech je pro dostatečně velké zatížení i přes sto Newtonů. Pro malá zatížení je rozdíl znatelně menší. Rozdílnost výsledků v lineárně a nelineárně elastickém materiálu je patrná z křivky  $\sigma(\varepsilon)$ , která charakterizuje použitý materiál.

## Seznam použitých zdrojů

- [1] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. Třetí. Brno: Akademické nakladatelství Cerm, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [2] BUDYNAS, Richard. *Advanced strength and applied stress analysis*. Druhé. Tsinghua: McGraw-Hill companies, 1999. ISBN 7-302-04593-3/O.
- [3] KŘÍŽ, Rudolf a Pavel VÁVRA. *Strojírenská příručka: 3. svazek*. Praha: SCIENTIA, 1993. ISBN 80-85827-23-9.
- [4] ONDRÁČEK, Emanuel, Miroslav HORÁČEK, Jan VRBKA, Přemysl JANÍČEK, Zdeněk MACH, Josef NOVOTNÝ a Ivo SOTOLÁŘ. *Pružnost a pevnost I: Prostá pružnost a pevnost*. Praha: SNTL, 1979. ISBN 02-085-179.
- [5] NĚMEC, Jaroslav, Jan DVOŘÁK a Cyril HÖSCHL. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. Praha: SNTL, 1989. ISBN 80-03-00193-5.
- [6] PARNES, Raymond. *Solid mechanics in engineering*. Anglie: Wiley, 2001. ISBN 0 471 49300 7.
- [7] BAJER, Jiří. *Mechanika 3*. Druhé. Olomouc: RNDr. Vladimír Chlup, 2012. ISBN 978-80-903958-5-5.
- [8] REDDY, Junuthula. *Energy principles and variational methods in applied mechanics*. Třetí. Texas: Wiley, 2017. ISBN 9781119087397.
- [9] ONDRÁČEK, Emanuel, Jan VRBKA, Přemysl JANÍČEK a Jiří BURŠA. *Mechanika těles - pružnost a pevnost II*. 4. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.
- [10] HÖSCHL, Cyril. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. Praha: SNTL/ALFA, 1971. ISBN 04-021-71.

## Seznam použitých symbolů

Symbol	Rozměr	Veličina
$\alpha$	[°]	úhel, který svírají pruty v úloze 7.2
$A$	[J]	práce
$\delta A$	[J]	celková virtuální práce zatěžujících sil
$\delta A^*$	[J]	komplementární virtuální práce
$\delta A_{int}$	[J]	virtuální práce vnitřních sil
$\delta A_{ext}$	[J]	virtuální práce vnějších sil
$\gamma_{xy}$	[-]	úhlové přetvoření v rovině xy
$\gamma_{yz}$	[-]	úhlové přetvoření v rovině yz
$\gamma_{zx}$	[-]	úhlové přetvoření v rovině zx
$\Gamma$	[m <sup>2</sup> ]	plocha působení plošného zatížení
$d$	[m]	průměr prutu
$E$	[Pa]	Youngův modul pružnosti
$\mathbf{T}_\varepsilon$	[-]	tenzor přetvoření
$\varepsilon$	[-]	délkové přetvoření
$\varepsilon_x$	[-]	délkové přetvoření ve směru osy x
$\varepsilon_y$	[-]	délkové přetvoření ve směru osy y
$\varepsilon_z$	[-]	délkové přetvoření ve směru osy z
$F$	[N]	síla
$\eta$	[m.N <sup>-1</sup> ]	posuv v bodě na jednotkovou zátěž
$G$	[Pa]	modul pružnosti ve smyku
$J_y$	[mm <sup>4</sup> ]	kvadratický moment plochy příčného průřezu k ose y
$J_z$	[mm <sup>4</sup> ]	kvadratický moment plochy příčného průřezu k ose z

$J_p$	[mm <sup>4</sup> ]	polární kvadratický moment plochy příčného průřezu
$K$	[Pa]	modul pružnosti
$l$	[m]	délka působení liniového zatížení
$L$	[m]	délka prutu
$\Lambda$	[J.m <sup>-3</sup> ]	měrná energie napjatosti (v literatuře označována i jako objemová hustota deformační energie)
$\Lambda^*$	[J.m <sup>-3</sup> ]	měrná komplementární energie napjatosti
$M$	[N.m]	ohybový moment
$M_k$	[N.m]	krouticí moment
$M_y$	[N.m]	ohybový moment kolem osy y
$M_z$	[N.m]	ohybový moment kolem osy z
$N$	[N]	normálová síla
$o$	[N.m <sup>-3</sup> ]	objemové zatížení
$p$	[N.m <sup>-2</sup> ]	plošné zatížení
$\pi$	[-]	silová soustava
$\Pi$	[J]	celková potenciální energie
$\Pi^*$	[J]	celková komplementární potenciální energie
$q$	[N.m <sup>-1</sup> ]	liniové zatížení
$Q$	[N]	doplňková síla
$R$	[N]	síla v prutu
$S$	[m <sup>2</sup> ]	plocha příčného průřezu
$T_\sigma$	[Pa]	tenzor napětí
$\sigma$	[Pa]	normálové napětí
$\sigma_x$	[Pa]	normálové napětí ve směru osy x
$\sigma_y$	[Pa]	normálové napětí ve směru osy y



$\sigma_z$	[Pa]	normálové napětí ve směru osy z
$\tau$	[Pa]	smykové napětí
$\tau_{xy}$	[Pa]	smykové napětí v rovině xy
$\tau_{yz}$	[Pa]	smykové napětí v rovině yz
$\tau_{zx}$	[Pa]	smykové napětí v rovině zx
$u$	[m]	posuv ve směru osy x
$v$	[m]	posuv ve směru osy y
$V$	[J]	potenciální energie vnějších sil
$V^*$	[J]	komplementární potenciální energie vnějších sil
$w$	[m]	posuv ve směru osy z
$w'$	[rad]	úhel natočení střednice prutu
$W$	[J]	energie napjatosti (v literatuře označována i jako deformační energie)
$W^*$	[J]	komplementární energie napjatosti
$\varphi$	[rad]	úhel natočení střednice prutu/příčného průřezu
$\Omega$	[m <sup>3</sup> ]	objem elementárního prvku

## Seznam použitých zkratk

Zkratka

Význam

---

VVÚ

výsledné vnitřní účinky